Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа программной инженерии

Отчет по расчетному заданию

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вариант 62

Выполнил

Студент гр. 5130904/10103 Бендрышев С.А

Руководитель Зайцев И.В

Санкт-Петербург

2023

# Оглавление

[Таблица нумерованных денормализованных чисел 3](#_gjdgxs)

[Вариационный ряд 4](#_30j0zll)

[Оценка математического ожидания, дисперсии, медианы 5](#_1fob9te)

[Группирование, графики статистических распределений 6](#_3znysh7)

[Полигон 6](#_2et92p0)

[Гистограмма 7](#_tyjcwt)

[Ступенчатая кривая 7](#_3dy6vkm)

[Точечная оценка характеристик распределения по сгруппированным данным 8](#_1t3h5sf)

[Оценка параметров распределения методом квантилей 9](#_hizbbgwdaiz3)

[Построение доверительных интервалов 10](#_v090jrq9iob2)

[Доверительный интервал для математического ожидания 10](#_eeug73qiryf)

[Доверительный интервал для дисперсии и среднеквадратичного отклонения 11](#_3npskp7d8vo6)

[Критерий хи-квадрат для проверки статистических гипотез 12](#_3rdcrjn)

[Проверка гипотезы об однородности выборки с помощью критериев знаков и Вилкоксона 14](#_26in1rg)

[Критерий знаков 14](#_lnxbz9)

[Критерий Вилкоксона 14](#_35nkun2)

# Таблица нумерованных денормализованных чисел

| 1521.0 | 1538.3 | 1528.8 | 1501.9 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1501.3 | 1570.7 | 1528.3 | 1553.3 |
| 1530.7 | 1435.1 | 1485.8 | 1464.7 |
| 1449.6 | 1488.4 | 1480.9 | 1441.3 |
| 1463.0 | 1492.6 | 1514.0 | 1507.0 |
| 1555.0 | 1526.7 | 1551.3 | 1498.2 |
| 1497.5 | 1509.2 | 1453.4 | 1500.0 |
| 1553.0 | 1467.7 | 1535.4 | 1504.1 |
| 1463.2 | 1465.0 | 1496.7 | 1482.9 |
| 1514.1 | 1513.2 | 1523.6 | 1467.8 |
| 1541.8 | 1462.7 | 1521.4 | 1491.5 |
| 1493.8 | 1517.2 | 1570.7 | 1505.7 |
| 1539.3 | 1537.8 | 1471.4 | 1486.8 |
| 1538.8 | 1493.4 | 1510.7 | 1465.3 |
| 1472.4 | 1496.4 | 1524.3 | 1471.8 |
| 1498.6 | 1480.8 | 1508.6 | 1570.6 |
| 1511.9 | 1536.1 | 1497.9 | 1504.0 |
| 1465.1 | 1540.5 | 1510.1 | 1550.6 |
| 1543.9 | 1503.1 | 1477.6 | 1494.6 |
| 1459.6 | 1453.0 | 1537.4 | 1538.2 |
| 1533.6 | 1502.2 | 1489.5 | 1544.8 |
| 1557.4 | 1478.8 | 1507.0 | 1502.7 |
| 1480.6 | 1516.8 | 1535.9 | 1495.0 |
| 1444.5 | 1540.1 | 1570.3 | 1490.9 |
| 1530.0 | 1551.2 | 1505.1 | 1539.9 |
| 1527.3 | 1512.8 | 1504.4 | 1541.9 |
| 1528.1 | 1557.6 | 1542.7 | 1493.9 |
| 1519.7 | 1526.3 | 1485.4 | 1557.9 |
| 1520.1 | 1490.5 | 1524.9 | 1475.5 |
| 1513.0 | 1587.3 | 1481.1 | 1542.4 |
| 1519.5 | 1501.9 | 1520.6 | 1509.5 |
| 1551.0 | 1507.8 | 1500.5 | 1533.5 |
| 1488.9 | 1503.6 | 1529.0 | 1479.7 |
| 1482.1 | 1554.8 | 1514.9 | 1506.4 |
| 1518.6 | 1532.6 | 1480.7 | 1479.7 |
| 1490.6 | 1472.9 | 1544.7 | 1505.7 |
| 1559.1 | 1462.9 | 1544.9 | 1503.8 |
| 1513.3 | 1465.8 | 1503.4 | 1522.6 |
| 1488.9 | 1548.8 | 1451.2 | 1544.1 |
| 1528.5 | 1506.0 | 1482.3 | 1567.8 |
| 1501.5 | 1512.4 | 1497.8 | 1478.9 |
| 1456.9 | 1511.0 | 1478.9 | 1447.0 |
| 1554.1 | 1504.4 | 1545.7 | 1503.6 |
| 1485.6 | 1553.1 | 1494.6 | 1499.1 |
| 1403.0 | 1516.8 | 1555.4 | 1505.3 |
| 1473.3 | 1511.3 | 1495.5 | 1479.5 |
| 1544.0 | 1539.4 | 1513.7 | 1566.8 |
| 1493.5 | 1470.4 | 1542.5 | 1551.4 |
| 1511.4 | 1517.9 | 1470.4 | 1534.7 |
| 1521.7 | 1516.8 | 1460.5 | 1485.2 |

*Таблица 1.*

# Вариационный ряд

Вариационный ряд – совокупность значений признака, записанных в порядке возрастания. При этом сам признак называют вариантой.

| 1403 | 1486.8 | 1507 | 1534.7 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1435.1 | 1488.4 | 1507.8 | 1535.4 |
| 1441.3 | 1488.9 | 1508.6 | 1535.9 |
| 1444.5 | 1488.9 | 1509.2 | 1536.1 |
| 1447 | 1489.5 | 1509.5 | 1537.4 |
| 1449.6 | 1490.5 | 1510.1 | 1537.8 |
| 1451.2 | 1490.6 | 1510.7 | 1538.2 |
| 1453 | 1490.9 | 1511 | 1538.3 |
| 1453.4 | 1491.5 | 1511.3 | 1538.8 |
| 1456.9 | 1492.6 | 1511.4 | 1539.3 |
| 1459.6 | 1493.4 | 1511.9 | 1539.4 |
| 1460.5 | 1493.5 | 1512.4 | 1539.9 |
| 1462.7 | 1493.8 | 1512.8 | 1540.1 |
| 1462.9 | 1493.9 | 1513 | 1540.5 |
| 1463 | 1494.6 | 1513.2 | 1541.8 |
| 1463.2 | 1494.6 | 1513.3 | 1541.9 |
| 1464.7 | 1495 | 1513.7 | 1542.4 |
| 1465 | 1495.5 | 1514 | 1542.5 |
| 1465.1 | 1496.4 | 1514.1 | 1542.7 |
| 1465.3 | 1496.7 | 1514.9 | 1543.9 |
| 1465.8 | 1497.5 | 1516.8 | 1544 |
| 1467.7 | 1497.8 | 1516.8 | 1544.1 |
| 1467.8 | 1497.9 | 1516.8 | 1544.7 |
| 1470.4 | 1498.2 | 1517.2 | 1544.8 |
| 1470.4 | 1498.6 | 1517.9 | 1544.9 |
| 1471.4 | 1499.1 | 1518.6 | 1545.7 |
| 1471.8 | 1500 | 1519.5 | 1548.8 |
| 1472.4 | 1500.5 | 1519.7 | 1550.6 |
| 1472.9 | 1501.3 | 1520.1 | 1551 |
| 1473.3 | 1501.5 | 1520.6 | 1551.2 |
| 1475.5 | 1501.9 | 1521 | 1551.3 |
| 1477.6 | 1501.9 | 1521.4 | 1551.4 |
| 1478.8 | 1502.2 | 1521.7 | 1553 |
| 1478.9 | 1502.7 | 1522.6 | 1553.1 |
| 1478.9 | 1503.1 | 1523.6 | 1553.3 |
| 1479.5 | 1503.4 | 1524.3 | 1554.1 |
| 1479.7 | 1503.6 | 1524.9 | 1554.8 |
| 1479.7 | 1503.6 | 1526.3 | 1555 |
| 1480.6 | 1503.8 | 1526.7 | 1555.4 |
| 1480.7 | 1504 | 1527.3 | 1557.4 |
| 1480.8 | 1504.1 | 1528.1 | 1557.6 |
| 1480.9 | 1504.4 | 1528.3 | 1557.9 |
| 1481.1 | 1504.4 | 1528.5 | 1559.1 |
| 1482.1 | 1505.1 | 1528.8 | 1566.8 |
| 1482.3 | 1505.3 | 1529 | 1567.8 |
| 1482.9 | 1505.7 | 1530 | 1570.3 |
| 1485.2 | 1505.7 | 1530.7 | 1570.6 |
| 1485.4 | 1506 | 1532.6 | 1570.7 |
| 1485.6 | 1506.4 | 1533.5 | 1570.7 |
| 1485.8 | 1507 | 1533.6 | 1587.3 |

# 

# Оценка математического ожидания, дисперсии, медианы

Оценка математического ожидания – среднее арифметическое.

=

= 1508.734

Смещенная оценка дисперсии по всей выборке.

31.748

Несмещенная оценка дисперсии

Оценка медианы – значение варианты, которое делит вариационный ряд на две равные по числу членов части. При четном числе членов (𝑛= 2𝑘) в качестве медианы принимают

Размах варьирования (широта распределения) – разность между наибольшим и наименьшим значениями варианты

= 184.300

# Группирование, графики статистических распределений

Сгруппируем данные в 11 интервалов. Возьмем ширину интервала равной 17.

Таблица подсчета частот и частотностей по интервалам вариационного ряда:

| N | Begin | End |  | F |  | acc( |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1403 | 1419.8 | 1411.4 | 1 | 0.005 | 0.005 |
| 2 | 1419.8 | 1436.7 | 1428.25 | 1 | 0.005 | 0.01 |
| 3 | 1436.7 | 1453.5 | 1445.1 | 7 | 0.035 | 0.045 |
| 4 | 1453.5 | 1470.4 | 1461.95 | 14 | 0.07 | 0.115 |
| 5 | 1470.4 | 1487.2 | 1478.8 | 28 | 0.14 | 0.255 |
| 6 | 1487.2 | 1504.1 | 1495.65 | 39 | 0.195 | 0.45 |
| 7 | 1504.1 | 1520.9 | 1512.5 | 40 | 0.2 | 0.65 |
| 8 | 1520.9 | 1537.8 | 1529.35 | 25 | 0.125 | 0.775 |
| 9 | 1537.8 | 1554.6 | 1546.2 | 31 | 0.155 | 0.93 |
| 10 | 1554.6 | 1571.5 | 1563.05 | 13 | 0.065 | 0.995 |
| 11 | 1571.5 | 1588.3 | 1579.9 | 1 | 0.005 | 1.0 |

*Таблица 3. Группировка*

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

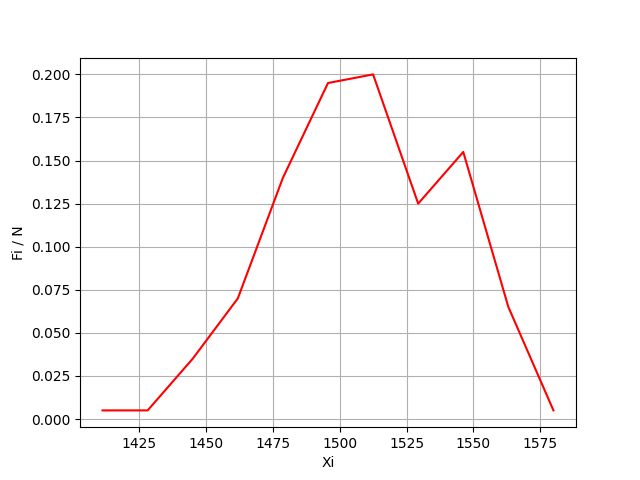
## 

## 

## 

## Полигон

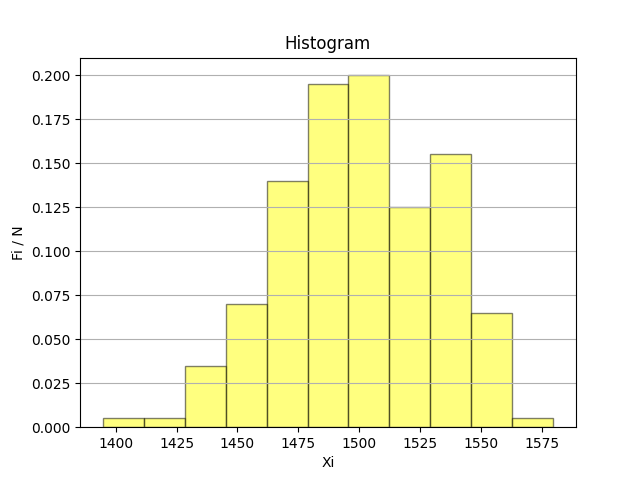
На оси абсцисс откладываются интервалы значений величины x, в серединах интервалов строятся ординаты, пропорциональные частотностям, и концы ординат соединяются отрезками прямых линий.



*Рис. 1. Полигон*

## Гистограмма

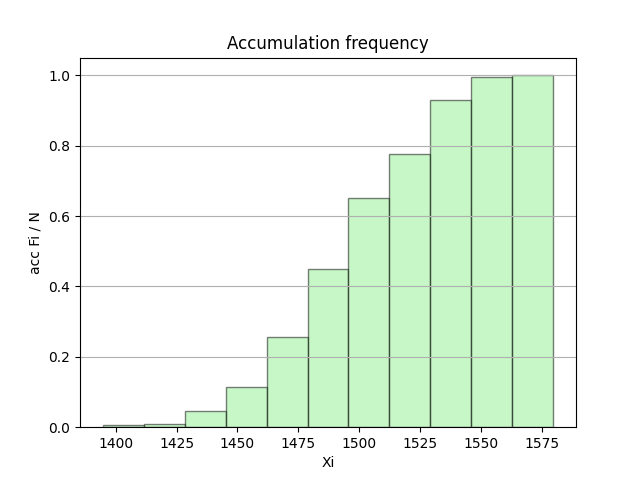
Над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим интервал значений x, строится прямоугольник, площадь которого пропорциональна частотности в данном интервале.



*Рис. 2. Гистограмма*

## Ступенчатая кривая

Над каждым отрезком оси абсцисс, изображающим расстояние между серединами интервалов значений x, проводится отрезок горизонтальной прямой на высоте, пропорциональной накопленной частости в данном интервале. Концы отрезков соединяются. Накопленной частостью в данном интервале называется сумма всех частостей, начиная с первого интервала до данного интервала включительно.



*Рис. 3. Ступенчатая кривая*

# Точечная оценка характеристик распределения по сгруппированным данным

Эмпирические числовые характеристики случайных величин подобно теоретическим

характеристикам подразделяются на характеристики положения центра группирования и

характеристики рассеивания.

Характеристиками положения являются среднее арифметическое 𝑥̅, оценки медианы

и моды , а эмпирическими характеристиками рассеивания – дисперсия ,

коэффициент вариации 𝜗 = (при 𝑥̅ ≠ 0), размах варьирования R и положение крайних (экстремальных) членов выборки.

Среднее арифметическое

𝑥̅=

Здесь - середина интервала, - число интервалов, - частота в интервале, - число элементов в выборке

𝑥̅ = 1508.62

Мода - середина самого многочисленного интервала

= 1512.5

Эмпирическая дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

Коэффициент вариации

Оценка дисперсии, полученная по сгруппированным данным, оказывается смещенной

(несколько увеличенной). Исправляют это смещение с помощью поправки Шеппарда.

Асимметрия:

Эксцесс:

## Оценка параметров распределения методом квантилей

Предположим, что выборка подчиняется нормальному закону распределения. Определим оценки параметров этого закона математического ожидания 𝑚 и среднего квадратичного отклонения 𝜎, используя метод квантилей.

Для определения оценок этих двух неизвестных составим два уравнения, используя формулу

) + 0.5 = p

Для этого возьмем два элемента из выборки с порядковыми номерами и Их вероятности равны соответственно 0.25 и 0.75. Получим систему из двух уравнений

25

75

Решив систему, получим

m = 1510.750

= 35.508

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## 

## Построение доверительных интервалов

Первые двадцать значений таблицы нумерованных денормализованных чисел, справа их вариационный ряд

| 1 | 1521.0 | 1449.6 |
| --- | --- | --- |
| 2 | 1501.3 | 1459.6 |
| 3 | 1530.7 | 1463.2 |
| 4 | 1449.6 | 1465.1 |
| 5 | 1463.0 | 1472.4 |
| 6 | 1555.0 | 1493.8 |
| 7 | 1497.5 | 1497.5 |
| 8 | 1553.0 | 1498.6 |
| 9 | 1463.2 | 1501.3 |
| 10 | 1514.1 | 1511.9 |
| 11 | 1541.8 | 1514.1 |
| 12 | 1493.8 | 1530.7 |
| 13 | 1539.3 | 1538.8 |
| 14 | 1538.8 | 1539.3 |
| 15 | 1472.4 | 1541.8 |
| 16 | 1498.6 | 1543.9 |
| 17 | 1511.9 | 1463.0 |
| 18 | 1465.1 | 1521.0 |
| 19 | 1543.9 | 1553.0 |
| 20 | 1459.6 | 1555.0 |

## Доверительный интервал для математического ожидания

В предположении нормального распределения отклонения значений от номинала построим доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном 𝜎 по первым двадцати значениям (n = 20) данной выборки по формуле

Здесь 𝑥̅ - среднее арифметическое первых 20 чисел, s - их среднее квадратичное отклонение

Определим доверительные интервалы для математического ожидания при различных значимостях

,

## Доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения

# Критерий хи-квадрат для проверки статистических гипотез

Проверим гипотезу о том, что выборка, данная в таблице 1, не противоречит нормальному закону распределения. Для проверки этой гипотезы воспользуемся критерием

Если численное значение критерия попадает в критическую область , то

гипотеза отвергается.

Оценку вероятности находим по формуле

=

Где 𝛼 и 𝛽 – границы интервалов, 𝑥̅ и 𝑠 вычислены ранее по данной выборке.

Если число оцениваемых по выборке параметров равно c, то на уклонения

накладываются тем самым ещё 𝑐 связей, поэтому число независимых между собой

уклонений в этом случае будет 𝑙 − 𝑐 − 1. Так как по данным выборки мы оценили параметры

нормального закона, то в нашем случае число степеней свободы будет равно

Для нашей выборки

Как мы видим, на всех этих уровнях значимости нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности выборки

# Проверка гипотезы об однородности выборки с помощью критериев знаков и Вилкоксона

Введем нулевую гипотезу 𝐻0 о том, что выборка, данная в таблице 1, является однородной. Для проверки этой гипотезы возьмем двадцать первых и двадцать последних значений таблицы 1 (две выборки). Воспользуемся непараметрическими (независимыми от формы распределения) критериями: критерием знаков и критерием Вилкоксона.

## Критерий знаков

Составим разность 𝑧𝑖 =𝑥 𝑖 − 𝑦𝑖, где *i* = 1, 2, …,20 – порядковые номера первых 𝑥𝑖 и последних 𝑦𝑖 двадцати значений выборки. Подсчитаем число положительных 𝑘𝑛(+) и отрицательных 𝑘𝑛(-) знаков разностей 𝑧𝑖 (n = 20).

Затем, выбрав уровень значимости 𝑞, находим по 𝑞 и 𝑛 критическое значение 𝑚̅ 𝑛 меньшего из чисел положительных и отрицательных знаков 𝑧𝑖. Если теперь меньшее из чисел знаков разностей окажется меньше 𝑚̅𝑛, то гипотеза об однородности выборки отвергается, а если меньшее из чисел знаков разностей окажется больше 𝑚̅𝑛, то следует признать, что гипотеза не противоречит данным выборки.

Для данных из таблицы 1 имеем:

𝑘𝑛(+) = 10

𝑘𝑛(−) = 10

Из таблицы по n = 20 получаем 𝑚̅𝑛 для различных *q*

При *q* = 5%: 𝑚̅𝑛 = 6 При *q* = 1%: 𝑚̅𝑛 = 4 При *q* = 10%: 𝑚̅𝑛 = 6

Так как минимальное из чисел 𝑘20(+) и 𝑘20(-) – 10 больше 𝑚̅𝑛 для всех выбранных уровней значимости, нулевая гипотеза 𝐻0 об однородности выборки не противоречит данным выборки.

## Критерий Вилкоксона

Критерий Вилкоксона основан на числе инверсий. Введем нулевую гипотезу 𝐻0 о том, что выборка, данная в таблице 1, является однородной. Эта гипотеза отвергается, если число *u* (число инверсий) превосходит выбранную в соответствии с уровнем значимости границу, определяемую из того, что при объемах 𝑛> 10 и 𝑚> 10 выборок число инверсий *u* распределено приблизительно нормально с центром:

Дисперсией

И средним квадратическим отклонением

Число инверсий:

Инверсии считались с помощью python

def inversion\_check(data\_sample: np.array, count=20) -> tuple[np.float64, np.float64, int]:

first\_sample = data\_sample[:count]

last\_sample = data\_sample[-count:]

def inv\_calculate(arr1, arr2):

arr1 = sorted(arr1)

total = 0

for i in range(len(arr1)):

for j in range(len(arr2)):

if arr1[i] > arr2[j]:

total += 1

return total

inv\_count = inv\_calculate(first\_sample, last\_sample)

M = first\_sample.size \* last\_sample.size / 2

D = first\_sample.size \* last\_sample.size / 12 \*

(first\_sample.size + last\_sample.size + 1)

return np.float64(M), np.float64(D), inv\_count

Задавшись уровнем значимости q, построим критическую область, используя

соотношение

Выражения для нахождения границ критической области 𝐻0 :

# Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий Колмогорова – Смирнова (критерий согласия) предназначен для

сопоставления двух распределений:

• эмпирического с теоретическим, например, равномерным или нормальным

• одного эмпирического распределения с другими эмпирическим распределением

Критерий позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений между

двумя распределениями является наибольшей, и оценить достоверность этого расхождения.

Введем нулевую гипотезу 𝐻0 : различия между двумя распределениями недостоверны

(судя по точке максимального накопленного расхождения между ними). Альтернативная

гипотеза 𝐻1 : различия между двумя распределениями достоверны (судя по точке

максимального накопленного расхождения между ними).

Заполним таблицу. Расход – разность по модулю между накопленной частотностью

эмпирического и нормального распределения.

| N | Begin | End | acc( | norm acc( | diff |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1403 | 1419.8 | 0.005 | 0.002 | 0.003 |
| 2 | 1419.8 | 1436.7 | 0.01 | 0.011 | 0.001 |
| 3 | 1436.7 | 1453.5 | 0.045 | 0.041 | 0.004 |
| 4 | 1453.5 | 1470.4 | 0.115 | 0.113 | 0.002 |
| 5 | 1470.4 | 1487.2 | 0.255 | 0.248 | 0.007 |
| 6 | 1487.2 | 1504.1 | 0.45 | 0.442 | 0.008 |
| 7 | 1504.1 | 1520.9 | 0.65 | 0.649 | 0.001 |
| 8 | 1520.9 | 1537.8 | 0.775 | 0.82 | 0.045 |
| 9 | 1537.8 | 1554.6 | 0.93 | 0.925 | 0.005 |
| 10 | 1554.6 | 1571.5 | 0.995 | 0.976 | 0.019 |
| 11 | 1571.5 | 1588.3 | 1.0 | 0.993 | 0.007 |

Критические значений критерия Колмогорова-Смирнова при сопоставлении

эмпирического распределения с теоретическим:

При 𝑝 = 0.05 : = 0.09616652

При 𝑝 = 0.01 : = 0.11525841

При 𝑝 = 0.10 : = 0.08626703

Если , то принимается нулевая гипотеза 𝐻0 на выбранном уровне

значимости, иначе – принимается альтернативная гипотеза.

При всех рассмотренных уровнях значимости 𝑝 нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о нормальном законе распределения